Ce sujet est composé de deux problèmes indépendants. (M, P')

La présentation et la rigueur des solutions proposées seront deux éléments importants dans l'appréciation des copies.

Dans les deux problèmes $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{N}$ celui des nombres entiers naturels.

PREMIER PROBLÈME

C désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques à valeurs réelles.
Pour tout $f \in C$ et pour tout entier p on pose :

$$a_p(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(pt)\, dt ;$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{-\pi \leqslant t \leqslant \pi} (|f(t)|).$$

L'objet de ce problème est de construire une fonction V appartenant à C telle que sa série de Fourier diverge au point $t = 0$.

Partie I

On pose :

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt \quad \text{pour tout } x \text{ réel;}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \quad \text{pour} \quad 0 < |x| < \pi \quad \text{et} \quad \psi(0) = 0.$$

1. Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$ et admet une limite finie en $+\infty$.

2. Pour tout entier naturel n on pose $\alpha_n = \varphi[(n+1)\pi] - \varphi[n\pi]$.
Montrer que $(|\alpha_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers 0 en décroissant.

3. Soit n un entier naturel.

a. Prouver que :

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \leqslant \alpha_0.$$

b. Soit $x \in [2n\pi, 2(n+1)\pi[$.
Montrer que :

$$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \alpha_0.$$

c. En déduire que :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |\varphi(x)| \leqslant \alpha_0.$$

4. Démontrer que ψ est de classe C^∞ sur $]-\pi, \pi[$. (On pourra développer $\sin x$ en série entière.)

5. En déduire un réel K indépendant de n tel que :

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad \left| \int_0^x \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right] \psi\left(\frac{t}{2}\right) dt \right| \leqslant K.$$

Partie II

Pour tout entier naturel n non nul on définit s_n et v_n sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kt)}{k}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad v_n(t) = s_{2n^2}(t) \sin\left(2^{(n^2)+1} t\right).$$

1. Exprimer $\sin\left(\frac{t}{2}\right)\left[s'_n(t) + \frac{1}{2}\right]$ en fonction de $\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right]$.

2. Pour $t \in [-\pi, \pi]$ exprimer $\displaystyle\int_0^t \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right]}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} du$ en fonction de $s_n(t)$.

3. Déduire alors de la partie I un majorant A de $\|s_n\|_\infty$ indépendant de n. (On pourra exprimer A à l'aide de K et de α_0 en utilisant $\varphi\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right]$ et I.3.*c.*).

4. Dans la suite du problème on désigne par V la fonction définie par :

$$V(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{v_n(t)}{n^2}.$$

Montrer que V est une application paire appartenant à C. (Citer avec précision le théorème employé.)

5. *Dans toute la question 5,* on considère deux entiers naturels non nuls, m et n.

a. Prouver que pour tout entier k :

$$1 \leqslant k \leqslant 2^{m^2} \Rightarrow \begin{cases} 2^{m^2} \leqslant 2^{m^2+1} - k < 2^{m^2+1} \\ 2^{m^2+1} < 2^{m^2+1} + k \leqslant 3 \times 2^{m^2}. \end{cases}$$

b. Montrer que :

$$1 \leqslant r < s \Rightarrow 3 \times 2^{r^2} < 2^{s^2}.$$

c. Si p est un entier tel que : $2^{n^2} \leqslant p < 2^{n^2+1}$

calculer :

$$a_p(v_m) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v_m(t)\cos(pt)\,dt.$$

(*Indication :* on pourra linéariser $v_m(t)$ puis distinguer les cas $m < n$, $m > n$ et $m = n$ en utilisant 5.*a.* et 5.*b.*)

d. Calculer :

$$a_p(V) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} V(t)\cos(pt)\,dt \quad \text{pour} \quad 2^{n^2} \leqslant p < 2^{n^2+1}.$$

6. *a.* Chercher un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ quand n tend vers $+\infty$.

b. Calculer $\sum_{p=2^{n^2}}^{2^{n^2+1}-1} a_p(V)$. Déduire de la question 6.*a.* un équivalent de cette somme quand n tend vers $+\infty$. En conclure que la série de Fourier de V diverge au point $t = 0$.

DEUXIÈME PROBLÈME

Le but de ce problème est l'étude des solutions d'une équation différentielle du premier ordre. On vérifiera en particulier que cette équation admet des solutions sur $\mathbb{R}$, que celles-ci ont, quel que soit n, un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, mais qu'elles ne sont pas développables en séries entières au voisinage de 0.

1. *a.* Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Étudier suivant les valeurs de α la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^x t^\alpha e^{-\frac{1}{t}}\,dt.$$

b. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^{-*}$. Étudier suivant les valeurs de α la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^x (-t)^\alpha e^{-\frac{1}{t}}\,dt.$$

2. On considère l'équation différentielle (E) :

$$x^2 y' + y = x.$$

a. Montrer que l'ensemble des points d'inflexion des courbes intégrales appartient à une hyperbole que l'on construira.

b. Après avoir énoncé le théorème d'existence et d'unicité des solutions de cette équation différentielle, la résoudre sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et sur $I_2 =]0, +\infty[$. (On exprimera les solutions à l'aide d'une intégrale.)

3. *a.* Trouver les solutions f de (E) sur I_2 telles que :

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = 0.$$

b. Trouver les solutions g de (E) sur I_1 telles que :

$$\lim_{x \to 0_-} g(x) = 0.$$

(On pourra, dans cette question 3, effectuer une ou deux intégrations par parties.)

4. *a.* Soit $n \in \mathbb{N}$ et $J_n(x) = (-1)^n n! \int_0^x t^{n-1} e^{-\frac{1}{t}} dt$.

Trouver un polynôme P_n à coefficients réels tel que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^{*+}, \quad J_n(x) + \exp\left(-\frac{1}{x}\right) P_n(x) = J_0(x).$$

b. En déduire le développement limité à l'ordre n, à droite en 0, des solutions de (E) sur I_2, qui ont une limite finie en 0_+.

On admettra que : $P_n(x)$ est le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = e^{1/x} \int_0^x \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} dt \quad \text{si} \quad x > 0,$$

$$h(0) = 0$$

$$\text{et} \quad h(x) = e^{1/x} \int_{-1}^x \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} dt \quad \text{si} \quad x < 0.$$

5. Existe-t-il des solutions de l'équation différentielle (E), développables en séries entières au voisinage de 0 ? Expliquez pourquoi.

6. L'équation différentielle (E) admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$? Expliquez pourquoi.